इकाई 8 प्रसामान्य संभाव्यता वितरण *

संरचना

8.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप;

- संभाव्यता की अवधारणा और प्रकृति का वर्णन कर सकेंगे;
- प्रसामान्य वितरण वक्र की अवधारणा, गुणों, उपयोग और गणना पर चर्चा कर सकेंगे;
- मानक प्राप्तांक की अवधारणा, गुणों और उपयोग को स्पष्ट कर सकेंगे; तथा
- प्रसामान्यता से अपसरण की व्याख्या कर सकेंगे।

8.1 प्रस्तावना

आइये हम इस इकाई की मुख्य अवधारणा प्रसामान्य संभाव्यता वक्र को एक उदाहरण से समझते है। मान लीजिए की हम बड़ी जनसंख्या की ऊँचाई या वजन जैसे चर या मनोव.

* डॉ. स्मिता गुप्ता , मनोविज्ञान संकाय, सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू

ैज्ञानिक चर जैसे बुद्धिमत्ता या संवेगात्मक बुद्धि की गणना करते हैं तो हमें एक ऐसा ग्राफ प्राप्त होगा जो यह प्रदर्शित करेगा की वितरण में अधिकतम प्राप्तांक मध्य में तथा कम प्राप्तांक किनारे पर है। उंचाई के उदाहरण से समझें तो औसत ऊंचाई के सर्वाधिक व्यक्ति होंगे और कुछ व्यक्ति ऐसे होंगे जिनकी ऊंचाई औसत की तुलना में अधिक या कम होगी। जब यह आँकड़ा एक ग्राफ पर आरेखित किया जायेंगा तो हमें एक प्रसामान्य वक्र मिलेगा जो की हम आकृति 8.1 में देख सकते है।

पिछली इकाईयों में हमने सांख्यिकी की अवधारणा, आकंड़ों का संगठन और रेखाआकृतिय प्रदर्शन, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप और परिवर्तन'ीलता के विषय में चर्चा की है। हमने सहसंबंध और इसकी गणना के विषय में भी चर्चा की है।

वर्तमान इकाई में आपको संभाव्यता की अवधारणा, प्रसामान्य संभाव्यता वक्र और अन्य सं. बंधित पहलुओं से परिचित कराया जायेगा।

8.2 संभाव्यता की अवधारणा

संभाव्यता शब्द का तात्पर्य संयोग या संभावना से है। उदाहरण के लिए, यदि आप कहते है की 'कल का दिन शायद गर्म होगा' या 'संभवतः कल शिक्षक नहीं आयेंगे, इन वाक्यों से पता चलता है की कल होने वाली घटनाओं की संभावना है लेकिन कोई निश्चितता नहीं है। इसका तात्पर्य है की उपरोक्त उदाहरणों में वर्णित घटनायें निश्चित नहीं है। अब एक प्रश्न आप को परेशान कर सकता है की संभाव्यता के साथ शोध और सांख्यिकी का क्या प्रयोजन है? किसी निश्चित कारण से किसी घटना के घटने की संभाव्यता शोध ाकर्ताओं को शोध और प्रयोग के लिए परिकल्पना बनाने में सहायता प्रदान करती है। यह शोधकर्ताओं के लिए आधार रेखा का कार्य करती है और शोध कार्यों को 'ाुरू करने के साथ–साथ उनके निष्कर्ष निकालने में भी सहायता प्रदान करती है। यह विज्ञान और शोध में प्रासंगिक है। यह वित्त, जुआ, कृत्रिम बुद्धिमत्ता, गणित और खेल सिद्धांत में भी महत्वपूर्ण है। शोधकर्ता संभाव्यता के आधार पर निष्कर्ष निकाल सकते है।

आसान शब्दों में, संभाव्यता किसी घटना के घटित होने के संयोग या संभावना को दर्शाता है। सांख्यिकी मे संभाव्यता शब्द सभी संभावित समान घटनाओं के मध्य किसी घटना के घ ाटित होने की अपेक्षित आवृत्ति (अवसर) को दर्शाता है। घटना के घटित होने की अपेक्षित आवृत्ति घटना को निर्धारित करने वाली स्थितियों के ज्ञान या जानकारी पर आधारित होती है। उदाहरण के लिए, यदि आप हवा में एक सिक्का उछालते है तो चित या पट आने के समान अवसर होते है। इस प्रकार, जब एक सिक्का हवा में उछाला जाता है चित या पट आने की संभाव्यता 1/2 होती है। इसी प्रकार पासा, जिसकी छह सतहों पर एक से छह बिन्दु होते है, उसमें किसी भी एक सतह के आने की संभावना 1/6 होती है।

संभाव्यता को सांख्यिकीय शब्दावली में अनुपात के रूप में दर्शाया जाता है, और संभाव्यता अनुपात को निम्नानुसार दर्शाया जाता है:

संभाव्यता अनुपात = वांछित परिणाम या घटनाएं/परिणामों या घटनाओं की कुल संख्या

इसे और अधिक स्पष्ट करने के लिए, प्रत्येक उछाल के बाद सिक्के के किसी भी पट की संभाव्यता अनुपात होगा

= 1 (चित या पट)/ 2 (सिक्के के पक्षों की कुल संख्या)

और पासे के किसी भी पट के गिरने की संभाव्यता का अनुपात

= 1 (पासे के छह पक्षों में से कोई एक पट)/6 (पासे के पक्षों की कुल संख्या)

संभाव्यता अनुपात हमेशा 0.00 (घटित होने की असंभावना) से 01.00 (घटीत होने की निश्चिता) के बीच होता है। हम कह सकते है की सूर्य के पूर्व दिशा में अस्त होने की संभावना 0.00 और सूर्य के पश्चिम दिशा में अस्त होने की संभावना 1.00 है। अन्य संभावित कोटिओं का पसार 0.00–1.00 के बीच ही होता है तथा उन्हे उपयुक्त अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है। यहां इस बात का उल्लेख जरूरी है की यदि किसी घटना की संभाव्यता अधिक है तो इस बात की अधिक संभावना है की घटना घटित होगी। उदाहरण के लिए, यदि यह अनुमान लगाया जाये की 'क्या कल दिन गर्म होगा?' तो यदि आज का तापमान अधिक है तो कल का तापमान अधिक होने की संभावना रहेगी। इसी तरह, यदि शिक्षक अस्वस्थ है तो उनके अगले दिन नहीं आने की संभावना अधिक होगी।

8.2.1 संभाव्यता से संबंधित अवधारणाएं

संभाव्यता एक सांख्यिकीय अवधारणा है जिसे मापा जा सकता है और इसका विश्लेषण भी किया जा सकता है। संभाव्यता के अनेक वैज्ञानिक उपयोगों के कारण इसकी कुछ संबंधित अवधारणाएं हैं जिन्हें जानना आप के लिए आवश्यक है। ये अवधारणाएं निम्न. लिखित हैः

1) **प्रतिदर्श समष्टि, घटनाएं और घात कुलकः** प्रयोग या घटना के सभी संभावित परिणामों या परिणामों के संग्रह को प्रतिदर्श समष्टि के रूप में जाना जाता है। उदाहरण के लिए, जब एक पासे को उछालते है तब संभावित अंक 1 से 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6 यह पासे की 6 पक्षों पर अंकित बिन्दुओं की संख्या है) के बीच होते है। पासे के परिणाम के लिए प्रतिदर्श समष्टि 1 से 6 तक होता है। प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय जो सारी संभावनाओं में से निर्दिष्ट संभावनाओं का संग्रह है उसे घात कुलक कहा जाता है। यदि हम मानते है की संभावित परिणामों का एक संग्रह पासे की सभी सम संख्या (2, 4, 6) हो सकती है, तो उपसमुच्चय (2, 4, 6) पासे के उछाल के प्रतिदर्श समष्टि के घात कुलक का एक तत्व है। इन संग्रहों को ''घटनाएं'' कहा जाता है। इस स्थिति में (2, 4, 6) एक घटना है जिसमे पासा किसी सम संख्या वाली सतह को दर्शाता है। यदि वास्तविक परिणाम किसी घटना में आते है तो घटना के घटित होने की बात कहीं जाती है। प्रतिदर्श समष्टि के संभावित परिणामों के सभी विभिन्न संग्रहों, को मिलाकर घात कुलक बनता है।

2) **परस्पर अनन्य घटनाऐं/असंयुक्त घटनाएंः** पारस्परिक अनन्य घटनाएं असंगतता को संदर्भित करती है। दो घटनाओं को परस्पर अनन्य तब कहा जाता है जब दोनों एक ही परीक्षण में एक साथ घटित नहीं हो सकते हैं। ऐसी परिस्थिति में, एक घटना दूसरी घटना को रोकती है। उदाहरण के लिए, जब एक सिक्का उछाला जाता है तो चित (H) और पट (T) में से एक ही समय दोनों नहीं आ सकते है। तब H और T दोनों परस्पर अनन्य घटनायें कही जाती है। इसलिए, यदि H और T एक परस्पर अनन्य घटना है तो उनकी संभाव्यता (HT) = 0 है।

3) **निःशेष/सामूहिक घटनाएंः** एक घटना को निःशेष कहा जाता है जब इसकी समग्रता में एक यादच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणाम सम्मिलित होते है। इसका मतलब हर बार परीक्षण करने पर इन परिणामों में से कम से कम एक घटना घटित होती है। उदाहरण के लिए, यदि आप एक पांसा फेंकते हैं तो परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के मध्य ही होगा। आप अंक 7 प्राप्त नहीं कर सकते है क्योंकि यह पासे में अंकित नहीं है। इसलिए परिणाम, 1, 2, 3, 4, 5 और 6 सामूहिक रूप से निःशेष है। क्योंकि वे संभावित परिणामों की संपूर्ण श्रेणी का गठन करते है।

4) **स्वतंत्र और आश्रित घटनाएंः** दो या अधिक घटनाओं को स्वतंत्र घटनाऐं कहा जाता है यदि एक घटना के परिणाम का दूसरी घटना पर प्रभाव नहीं पड़ता है या वे अन्य घटनाओं के परिणामों से प्रभावित नहीं होते है। सिक्का उछालने के परिणाम पासे के उछालने के परिणाम से प्रभावित नहीं होंगे। जबकि आश्रित घटनाएं वे घटनाएं होती है जिनमें किसी भी परीक्षण में किसी एक घटना के घटित होने या घटित न होने की घटना अन्य परीक्षणों में अन्य घटना की संभाव्यता को प्रभावित करती है। उदाहरण के लिए, हमारे पास एक टोकरी में पांच सेब और पांच संतरे है और हम टोकरी में से एक फल निकालते है जो सेब या संतरा हो सकता है। यदि यह सेब था तो टोकरी में चार सेब और पांच संतरे बचे हैं। इस प्रकार, अगला फल जो हम टोकरी से निकलेनेगे वह सेब होने की संभाव्यता 4/9 होगी। लेकिन यदि प्रथम बार फल संतरा था तो संभाव्यता 5/9 होगी।

5) **समसंभावित घटनाएंः** घटनाओं को समसंभावित घटनाएं तब कहा जाता है जब इनकी लगभग समान बार घटित होने की पर्याप्त संभावना होती है। इसी प्रकार, कोई भी घटना दूसरों की तुलना में अधिक बार घटित होने की संभाव्यता नहीं होती है। उदाहरण के लिए, यदि एक निष्पक्ष सिक्का उछाला जाता है तो सिक्के के दोनो भाग समान संख्या में देखे जाने की संभावना रहती है।

6) **पूरक घटनाएंः** यदि दो घटनाएं परस्पर अनन्य और निःशेष हैं तो दोनों एक दूसरे की पूरक कही जाती हैं। उदाहरण के लिए, यदि दो घटनाएं X और Y है, तो X को Y की पूरक घटना या Y को X की पूरक घटना कहा जाता है। आइये इसे एक पासा फेंककर समझते हैं, पासे का सम संख्याओं (2, 4, 6) और विषय संख्याओं (1, 3, 5) वाले सतह का घटित होना पूरक घटनायें है। यह घटना के दो संभावित परिणाम हैं और केवल यह दो ही संभावित परिणाम हो सकते हैं।

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 1

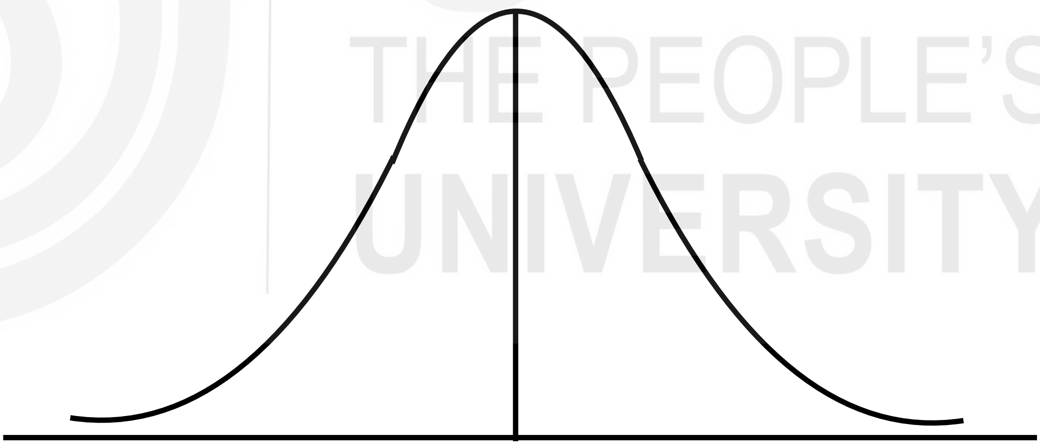
निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइए।

क्र.	**कथन**	**सत्य/असत्य**
क	ऐसी घटनाओं को समसभावित घटनाएं कहा जाता है यदि प्रत्येक घटना लगभग समान बार घटित होने की पर्याप्त संभावना होती है।	
ख	संभाव्यता अनुपात हमेशा –1.00 से +1.00 के बीच होता है।	
ग	दो घटनाओं को असंयुक्त कहा जाता है यदि दोनों एक ही परीक्षण में साथ में घटित होते है।	
घ	दो या अधिक घटनाओं को स्वतंत्र घटना कहते हैं जब एक के परिणाम का दूसरी घटना पर प्रभाव नहीं पड़ता है, या अन्य घटनाओं के परिणामों से वह प्रभावित नहीं होती है।	

च	यदि दो घटनाएं परस्पर अनन्य और संपूर्ण हैं वे दोनों एक दूसरे की पूरक कही जाती हैं।	

8.3 प्रसामान्य संभाव्यता वितरण की अवधारणा, प्रकृति और गुण

एक चर के लिए सतत् संभाव्यता वितरण को प्रसामान्य संभाव्यता वितरण या सिर्फ प्रसामान्य वितरण कहा जाता है। इसे गाउसीयन वितरण भी कहा जाता है। प्रसामान्य वितरण का निर्धारण दो मुख्य मापदंडों, माध्य और प्रसरण द्वारा होता है। प्रसामान्य वित. रणों का उपयोग यादच्छिक चर के वास्तविक मान का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है जिनके वितरण पहले से पता नहीं होते है। वे प्राकृतिक विज्ञान और सामाजिक विज्ञान के क्षेत्रों में अनेकों बार उपयोग किये जाते है। जब प्रसामान्य वितरण को ग्राफ में प्रदर्शित किया जाता है तो इसे प्रसामान्य संभाव्यता वितरण वक्र या सिर्फ प्रसामान्य वक्र के रूप में जाना जाता है। प्रसामान्य वक्र एक घंटी के आकार का वक्र हैं और यह द्विपक्षीय सममित और निरंतर आवृत्ति वितरण वक्र है। ऐसे वक्र की रचना एक बड़े प्रतिदर्श में सतत् चर के प्राप्तांकों की आवृत्ति के अंकन के परिणाम से होती है। वक्र को प्रसामान्य वितरण वक्र के रूप में जाना जाता है क्योंकि इसका y अक्ष अवलोकित आवृत्ति की बजाय सापेक्ष आवृत्ति या सम्भाव्यताओं को प्रदान करता है ।एक सतत् यादच्छिक चर को प्रसामान्य वितरित कहा जा सकता है यदि उसके आयत आकृति में सापेक्ष आवृत्तियों का आकार प्रसामान्य वक्र के जैसे है (जैसे कि निम्न आकृति 8.1 में दर्शाया गया है)।



आकृति 8.1: प्रसामान्य वक्र

मानसिक मापन और प्रयोगात्मक मनोविज्ञान के क्षेत्रों में प्रसामान्य वक्र की आवृत्ति वितरण की विशेषताओं को समझना अति महत्वपूर्ण है।

8.3.1 प्रसामान्य वितरण का महत्व

जैसा की पहले चर्चा की गई थी, प्रसामान्य वितरण प्राकृतिक विज्ञान और अन्य सामाजिक विज्ञानों के क्षेत्र में बहुत महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। प्रसामान्य वितरण की कुछ प्रासंगि. कतायें निम्नलिखित है:

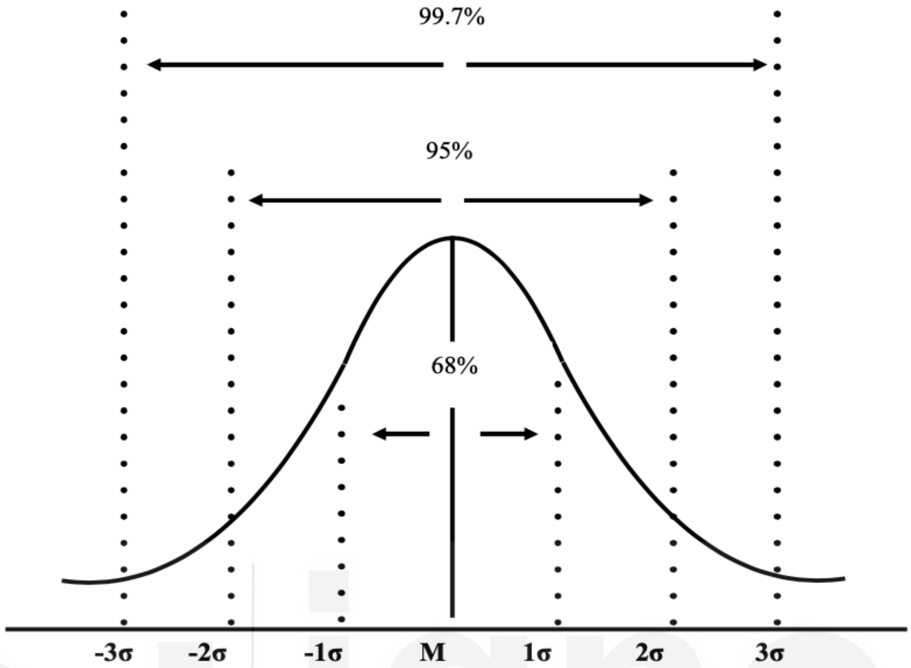
- प्रसामान्य वितरण एक सतत् वितरण है और यह सांख्यिकीय सिद्धांत और अनुमान में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।
- प्रसामान्य वितरण में विभिन्न गणितीय गुण होते है जोकि आवृत्ति वितरण को सरलतम रूप में व्यक्त करना आसान बनाते है।

- यह प्रतिदर्श वितरण की उपयोगी विधि है।
- व्यवहार विज्ञान में कई चर जैसे वजन, उंचाई, उपलब्धि, बुद्धिमत्ता का प्रसामान्य वक्र की तरह वितरण होता है।
- z–परीक्षण, t–परीक्षण और F–परीक्षण जैसे कई अनुमानिक सांख्यिकी के लिए प्रसामान्य वितरण एक आवश्यक घटक है।

8.3.2 प्रसामान्य वितरण वक्र के गुण

जैसा कि पहले चर्चा की गई थी, यादच्छिक चर के प्रसामान्य वितरण का वक्र रेखाआकृति रूप में प्रसामान्य संभाव्यता वितरण वक्र नाम से जाना जाता है। प्रसामान्य वक्र के गुण निम्नलिखित हैः

- यह घण्टी के आकार का वक्र है जो की द्विपक्षीय सममित है और इसमे सतत् आवृत्ति वितरण वक्र होता है।
- यह याद्च्छिक चर के लिए सतत् संभाव्यता वितरण है।
- इसके दो भाग (दाएं और बाएं) है और माध्य, माध्यिका और बहुलक का मान समान (माध्य = माध्यिका = बहुलक) होता है। अर्थात् वे वक्र के मध्य में एक ही बिंदु पर मिलते है।
- प्रसामान्य वक्र अनंतस्पर्शी हैं, अर्थात् यह माध्य से आगे बढ़ता है और यह x अक्ष को नहीं छूते है।
- माध्य, वक्र के मध्य में स्थित होता है। यह वक्र को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रसामान्य वक्र का कुल क्षेत्रफल $z \pm 3\ \sigma$, माध्य से कम या अधिक के बीच होता है।
- प्रसामान्य वक्र के तहत इकाई का क्षेत्र, एक (N= 1) के बराबर कहा जाता है, मानक विचलन एक (σ =1) होता है, प्रसरण एक (σ^2=1) होता है और माध्य शून्य (μ=0) होता है।
- बिंदु जहाँ वक्र ऊर्ध्वमुख से अधोमुख में परिवर्तित होता है, इन बिंदुओं को विभक्ति बिंदु कहेत है।
- प्रसामान्य सम्भावयकता वक्र में माध्य से दाएं ओर के z–प्राप्तांक या मानक प्राप्तांक धनात्मक होते है और माध्य से बाएं ओर के z– प्राप्तांक या मानक प्राप्तांक ऋणात्मक होते है।
- लगभग 68% वक्र क्षेत्र, माध्य से धन या ऋण एक मानक विचलन ($\pm 1\ \sigma$) की सीमा में आता है। लगभग 95% वक्र क्षेत्र, माध्य से धन या ऋण दो मानक विचलन (± 2) की सीमा में आता है और लगभग 99.7% वक्र क्षेत्र, माध्य से धन या ऋण तीन मानक विचलन (± 3) की सीमा में आता है (आकृति 8.2 देखिए)।
- प्रसामान्य वितरण विषमता से मुक्त है अर्थात् इसका विषमता गुणाक शून्य है।
- दिये गये किसी भी दो z- प्राप्तांक के बीच का आंशिक क्षेत्रफल प्रसामान्य वक्र के दोनों भागों में समान होता है। उदाहरण के लिए, +1 z- प्राप्तांक और −1 z- प्राप्तांक के बीच का आंशिक क्षेत्र समान होता है। इसके अलावा प्रसामान्य वक्र के दोनों भागों में एक विशेष z- प्राप्तांकों पर कोटि की उंचाई समान होती है। उदाहरण के लिए +1 z तथा −1 z पर कोटि की उंचाई समान होती है।



आकृति 8.2: प्रसामान्य संभाव्यता वितरण वक्र

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 2

1) रिक्त स्थान को भरें:

क) ———————————— को शिखर की आदर्श मात्रा या कुर्टोसिस माना जाता है।

ख) प्रसामान्य संभाव्यता वक्र में माध्य, माध्यिका और बहुलक का मान ———————— है।

ग) प्रसामान्य वितरण एक ————————— वितरण है और यह सांख्यिकीय सिद्धांत और अनुमान में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

घ) प्रसामान्य वक्र के अंतर्गत इकाई का क्षेत्रफल———————————— के बराबर माना जाता है।

च) प्रसामान्य वितरण दो मापदंडों द्वारा निर्धारित किया जाता है —————————— और ——————————————।

8.4 मानक प्राप्तांक (z-प्राप्तांक)

मानक प्राप्तांक या z-प्राप्तांक एक रूपांतरित प्राप्तांक है। और यह दर्शाता है की मानक विचलन मात्रक की संख्या से अवलोकन का मान (असंसाधित प्राप्तांक) माध्य से कितना ऊपर या नीचे है। मानक प्राप्तांक, प्रसामान्य वितरण में एक प्राप्तांक की संभाव्यता पता करने में सहायता करता है। यह विभिन्न प्रसामान्य वितरणों से प्राप्तांकों की तुलना करने में भी सहायता करता है।

8.4.1 मानक प्राप्तांकों की अवधारणा

मानक प्राप्तांक एक ऐसा प्राप्तांक है जो मान के बारें में सूचित करता है और यह भी बताता है की एक वितरण में मान कहाँ निहित है। उदहारण के लिए, यदि एक मान 5 मानक विचलन से माध्य के ऊपर है तो इसका अर्थ है की मान माध्य से पांच गुना औसत अंतर पर है। यह असंसाधित प्राप्तांक का रूपांतरित प्राप्तांक है। एक असंसाधित प्राप्तांक या प्रतिदर्श मान अपरिवर्तित मान है या मापन का प्रत्यक्ष परिणाम है। एक असंसाधित प्राप्तांक (X) या प्रतिदर्श मान, एक वितरण में अपने स्थान के बारेमें कोई जानकारी नहीं प्रदान कर सकता है। इसीलिए इन असंसाधित प्राप्तांकों को z-प्राप्तांक में रूपांतरित किया जाता है ताकि एक वितरण में मूल प्राप्तांकों के स्थान के बारेंमें पता चले। z- प्राप्तांक का प्रयोग पूरे वितरण को मानकीकृत करने में किया जा सकता है।

यह प्राप्तांक (z) परीक्षण के प्रमाण की तुलना सामान्य जनसँख्या से करने में सहायता करता है। परीक्षण या सर्वेक्षणाम परीणाम के हजारों संभावित परीमाण और एकांश हो सकते है। यह परिणाम अर्थहीन होंगे जब तक इन्हे रूपांतरित न किया जाये। उदाहरण के लिए यदि परिणाम यह दिखते है की एक व्यक्ति की लम्बाई 6.5 है, ऐसा जाँच परिणाम अर्थपूर्ण तभी हो सकता है जब इसकी तुलना औसत लम्बाई से की जाये। ऐसी परिस्तिति में, z- प्राप्तांक उस व्यक्ति की लम्बाई औसत जनसँख्या की लम्बाई की तुलना में कहाँ है, इसके बारेमें विचार प्रदान कर सक्ता है।

8.4.2 z-प्राप्तांक के गुण

मानक (z) प्राप्तांक के कुछ गुण निम्नलिखित हैः

- z-प्राप्तांक का माध्य सदैव 0 होता है।
- यह भी ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि z-प्राप्तांक का मानक विचलन सदैव 1 होता है।
- इसके अलावा z-प्राप्तांक वितरण ग्राफ का आकार सदैव प्रतिदर्श मानों के मूल वितरण के समान होता है।
- 0 (शून्य) से उपर का z-प्राप्तांक माध्य से उपर प्रतिदर्श मानों का प्रतिनिधित्व करता है जबकि शून्य (0) से नीचे का z-प्राप्तांक माध्य से नीचे के प्रतिदर्श मूल्यों का प्रतिनिधित्व करता है।
- z-प्राप्तांक के वितरण का आकार असंसाधित प्राप्ताकों के मूल वितरण के समान या समरूप होगा। इस प्रकार यदि मूल वितरण प्रसामान्य वितरण है तो मानक प्राप्तांक का वितरण भी प्रसामान्य होगा । इसलिए, किसी भी आँकड़ों को z-प्राप्तांक में परिवर्तित करने से उन आँकड़ों के वितरण का प्रसामान्यकरण नहीं होता है।

8.4.3 प्राप्तांक का उपयोग

z- प्राप्तांक निम्नलिखित तरीकों से उपयोगी हैः

- **यह जनसंख्या वितरण मे अवलोकनों की स्थिति की पहचान करने में सहायता करता हैः** जैसा की पहले उल्लेख किया गया है, z-प्राप्तांक मानक विचलन के मात्रक में किसी मान की माध्य से स्थिति/दूरी निर्धारित करने में सहायता प्रदान करता है। इसके अलावा, यदि प्राप्तांक का वितरण प्रसामान्य वितरण की तरह है तब हम किसी विशेष मान से उपर या नीचे वाली जनसंख्या के अनुपात का अनुमान लगां सकते हैं। बच्चों के आहार और पोषण से संबंधित अध्ययनों में z-प्राप्तांकों का महत्वपूर्ण निहितार्थ

है। यह पोषण के संदर्भ में बच्चों की ऊंचाई, वजन और उम्र के मानो का आंकलन करने में सहायता करता है।

- **इनका उपयोग असंसाधित आँकड़ों के मानकीकरण के लिए किया जाता हैः**

  यह आँकड़ों को मानकीकृत या रूपांतरित करने में सहायता करता है ताकि उनका मानकीकृत मापन संभव हो सके। उदाहरण के लिए, यदि आप एक परीक्षण में प्राप्तांक की तुलना दूसरे परीक्षण में प्राप्तांकों से करना चाहते हैं, तो असंसाधित प्राप्तांकों के आधार पर तुलना संभव नहीं है। ऐसी स्थिति में, जब आप परीक्षण प्राप्तांक के दोनों समूहों का मानकीकरण करते हैं तभी उनकी तुलना की जा सकती है।

- **यह विभिन्न प्रसामान्य वितरणों से प्राप्त प्राप्तांकों की तुलना करने में सहायता करता हैः** जैसा की पिछले उदाहरण में बताया गया है, z-प्राप्तांक विभिन्न प्रसामान्य वितरणों से प्राप्त प्राप्तांकों की तुलना करने में सहायता करता है। इस प्रकार, z-प्रा. प्तांक दो अलग–अलग परीक्षणों से प्राप्त IQ प्राप्तांकों की तुलना में सहायता कर सकता है।

8.4.4 z-प्राप्तांक की गणना

जैसा की पहले उल्लेखित है, z-प्राप्तांक मानक विचलन में माध्य से प्रतिदर्श मान की दूरी को उल्लेखित करता है। प्रतिदर्श के प्रत्येक मान के लिए Z-प्राप्तांक की गणना की जा सकती है। प्रतिदर्श मान के z-प्राप्तांक की गणना करने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है।

$z = X- M/ SD$ या

$z = X- M/\sigma$

जहां,

X = एक वि ोष असंसाधित प्राप्तांक

M = प्रतिदर्श माध्य

SD or σ = मानक विचलन

समझने के लिए, मान लीजिए की विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त अंक निम्नलिखित है। प्राप्त अंक, असंसाधित प्राप्तांकों के रूप में यहां व्यक्त किए गए है। माध्य, मानक विचलन और z- प्राप्तांक की गणना तदनुसार की जा सकती हैः

विद्यार्थी	असंसाधित प्राप्तांक (X)	X-M	z
क	50	-15	-1.24
ख	60	-5	-0.41
ग	66	1	0.08
घ	70	5	0.41

च	80	15	1.24
N=5			
योग	326		
माध्य	65		
SD	12.04		

उपरोक्त उदाहरण में प्रत्येक विद्यार्थी क, ख, ग, घ, च द्वारा प्राप्त अंकों का z-प्राप्तांक दिखाया गया है। उपरोक्त उदाहरण में विद्यार्थी 'क' का मानक विचलन 1.24 है या उसका प्राप्तांक माध्य से नीचे 1.24 मानक विचलन मात्रक में है। इसी प्रकार विद्यार्थी 'छ' माध्य से 1.24 मानक विचलन मात्रक ऊपर है। मानक विचलन का उपयोग मानक प्राप्तांक में माप के मात्रक के रूप में किया जाता है।

मानक प्राप्तांक दिये गये आंकडों का प्रसामान्यीकरण करने तथा उसका संक्षिप्तीकरण, एक प्रसामान्य मानक में करने में सहायता करता है। और यह माध्य से कितने मानक विचलन मान निहित है इसके अधार पर किया जाता है।

z-प्राप्तांक का विचरण –3 मानक विचलन (जो प्रसामान्य वितरण वक्र के बाएं ओर होता है) और +3 मानक विचलन (जो प्रसामान्य वितरण वक्र के दाएं ओर होता है) के बीच होता है। इसके आलावा हमे, जनसँख्या के μ (माध्य) के मान तथा σ (मानक विचलन) के मान की जरुरत होगी.

इस प्रकार, यदि हम X =70, M =65 और SD = 12.04 के लिए z-प्राप्तांक की गणना करना चाहते है तो हम सूत्र का उपयोग करेंगे।

z = X- M/ SD

= 70- 65/ 12.04

= 5/ 12.04

= 0.42

इस प्रकार, प्राप्त z- प्राप्तांक 0.42 है।

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 3

1) रिक्त स्थानों को भरें:

(क) z-प्राप्तांकों का माध्य सदैव ———— होता है।

(ख) ———— का उपयोग असंसाधित आँकड़ों को मानकीकृत करने के लिए किया जाता है।

(ग) z-प्राप्तांक का विचरण ———— से लेकर ———— मानक विचलन होता है।

(घ) z- प्राप्तांक का मानक विचलन सदैव ———— होता है।

(च) मानक प्राप्तांक एक ऐसा प्राप्तांक है जो ————————— के विषय में सूचित करता है।

8.5 प्रसामान्यता से अपसरणः कुर्टोसिस तथा विषमता

अनेकों बार, प्रसामान्य संभाव्यता वितरण वक्र की तुलना में आवृत्ति वक्र ऊंचे शिखर वाला या चपटा हो सकता है। ऐसे मामलों में कहा जाता है की वितरण प्रसामान्य से अपसरित है। मूल रूप से यह अपसरण दो प्रकार के होते हैः कुर्टोसिस और विषमता। कुर्टोसिस याद्च्छिक चर की संभाव्यता वितरण के 'टेल्डनेस' (tailedness) का माप है।

अन्य 'ाब्दों में, कुर्टोसिस मापन करता है की क्या प्रसामान्य वितरण के संदर्भ में आँकड़ा भारी पुच्छल या हल्का पुच्छल है। दूसरी ओर विषमता अपने माध्य के विषय में याद्च्छिक चर की संभाव्यता वितरण की विषमता का माप है। आइये एक–एक कर दोनों अपसरणो पर चर्चा करें।

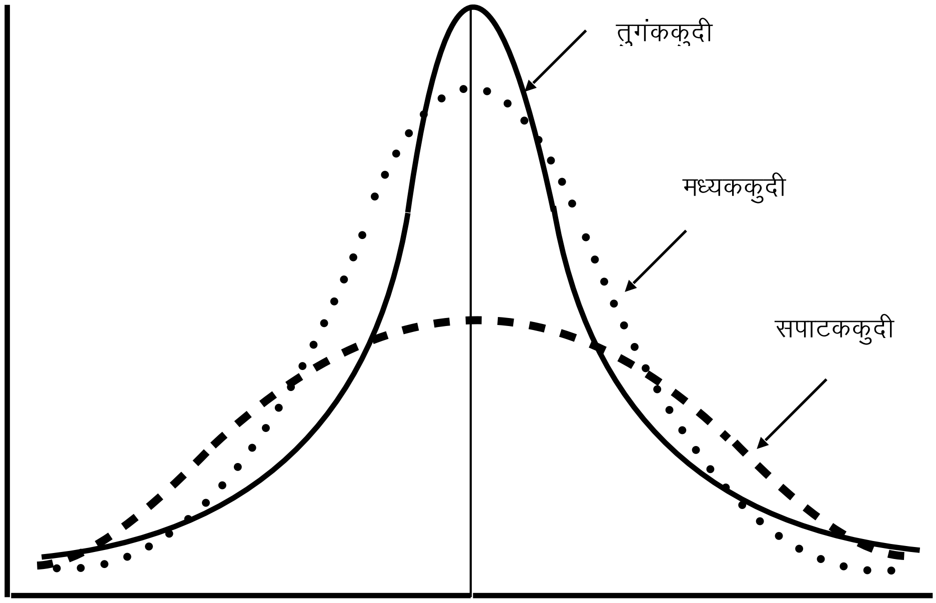
8.5.1 कुर्टोसिस

कुर्टोसिस, वितरण वक्र की पुंछ से संबंधित है न की इसके शिखर से। यह वक्र की उंचाई को प्रदर्शित नहीं करता है। कुर्टोसिस को एक वितरण के लिए विभिन्न तरीकों से मात्रा निर्धारित किया जा सकता है। प्रसामान्य वितरण में किसी भी चर का कुर्टोसिस 3 होता है। इस मान का उपयोग कुर्टोसिस के अन्य प्रकारों से तुलना के लिए किया जाता है। कुर्टोसिस को निम्नलिखित प्रकारों में वर्गीकृत है (आकृति 8.3 देखें):

1) **लेप्टोकुर्टोसिस (तुगककुदी)**: लेप्टोकुर्टोसिस वितरण में, प्रसामान्य संभाव्यता वक्र की तुलना में आवृत्ति वक्र संकरा होता है तथा वक्र का क्षेत्रफल केन्द्र की ओर पाली होता है और दोनों छोरों पर लंबी पुंछ होती है। आमतौर पर इसे सकारात्मक कुटो. 'सिस भी कहा जाता है जिससे प्रसामान्य वितरण की तुलना में वितरण के मान में भारी पुंछ होती है (आकृति 8.3 देखें)।

2) **मेसो कुर्टोसिस (मध्यककुदी)**: मेसोकुर्टोसिस वक्र ज्यादा नुकीला और चपटा नहीं होता है। यह एक प्रसामान्य वक्र की तरह ही दिखता है (मंगल, 2002)।

3) **प्लेटीकुर्टोसिस (सपाटककुदी)**: यह वक्र एक एसा वितरणं है जिसमे प्रसामान्य वितरण की तुलना में कम मात्रा मे और कमतर चरम आउटलिएर्स (outliers) होते हैं। आमतौर पर इसे नकारात्मक कुर्टोसिस के तौर पर संदर्भित किया जाता है, जिसमें वितरण के मान में कम मात्रा में या कमतर पूँछ या आउटलिएर्स (outliers) होते हैं। यह वक प्रसामान्य वक्र की तुलना में चपटा होता है (आकृति 8.3 देखें)।



आकृति 8.3: कुर्टोसिस के तीन प्रकार

कुर्टोसिस की गणना निम्नलिखित सूत्र की सहायता से की जा सकती है:

$K_u = QD / P_{90} - P_{10}$

जहां,

K_u = कुर्टोसिस

QD = चतुर्थक विचलन

P_{90} = 90वां शतमक

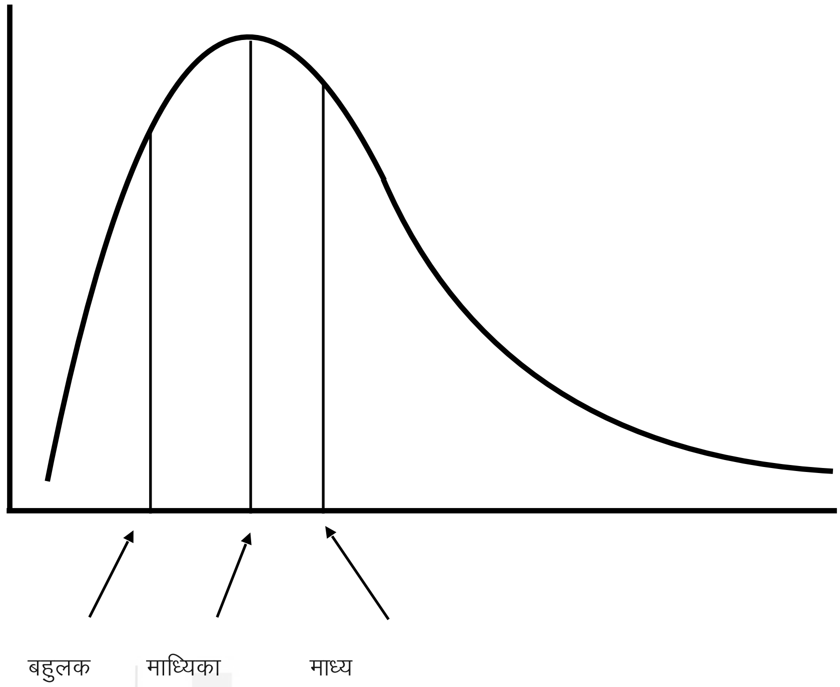
P_{10} = 10वां शतमक

जब कुर्टोसिस की गणना उपरोक्त सूत्र से की जाती है, तो प्रसामान्य वक्र के लिए इसका मान 0.263 प्राप्त होता है। यदि प्राप्त मान 0.263 से कम है तो वक्र को लेप्टोकुर्टोसिस (तुगककुदी) कहा जा सकता है। यदि मान 0.263 से ऊपर है तो वक्र को प्लेटीकुर्टोसिस (सपाटककुदी) कहा जाता है (मंगल, 2002)।

8.5.2 विषमता

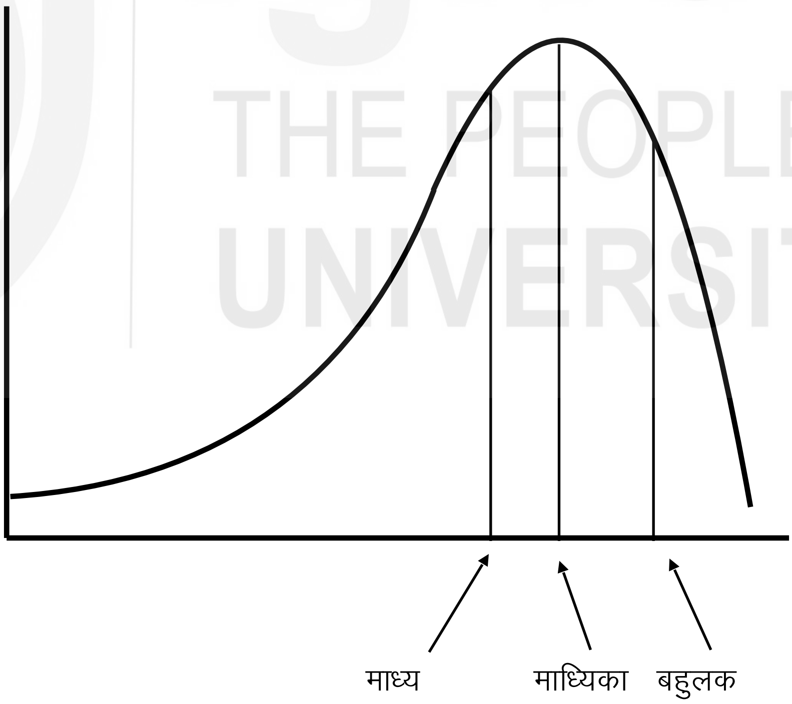
जैसा की आपको पहले बताया गया है की प्रसामान्य संभाव्यता वक्र में माध्य,माध्यिका और बहुलक एक साथ होते है (एक ही बिन्दु पर होते है) और उनके मान एक समान होते है। विषमता वितरण में माध्य, माध्यिका एवं बहुलक एक ही बिन्दु पर न होकर अलग–अलग बिन्दुओं पर होते है तथा गुरुत्व का केंद्र वितरण के एक तरफ स्थानांतरित हो जाता है। विषमता वक्र समरूपता की कमी को निर्धारित करता है क्योंकि प्रसामान्य संभाव्यता एक सममित वक्र है, उसमें विषमता शून्य होती है। पियरसन मापक और शतमक के द्वारा विषमता का मापन किया जा सकता है। प्राप्तांक के वितरण के आधार पर, विषमता को दो प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है:

1) **धनात्मक विषमता:** वितरण वक्र को धनात्मक रूप में विषम कहा जाता है जब उसमें प्राप्तांक का वितरण बायें छोर पर अधिक होता है (आकृति 8.4 देखें)। धनात्मक विषमता वितरण में अधिकतर व्यक्तियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक माध्य से काम होते है।



आकृति 8.4: धनात्मक विषमता

2) **ऋणात्मक विषमताः** दूसरी तरफ, यदि प्राप्तांक का वितरण दायीं ओर अधिक होता है तो वितरण को ऋणात्मक विषमता कहा जाता है (आकृति 8.5 देखें)। यहां माध्यिका माध्य से अधिक है इसलिए माध्य, माध्यिका के बायें तरफ है। इसमें अधिकतर व्यक्तियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक माध्य से अधिक होते है।



आकृति 8.5: ऋणात्मक विषमता

विषमता की गणना निम्न सूत्र की सहायता से की जा सकती हैः

$S_k = 3\,(M - M_d)/\,SD$

जहां,

S_k = विषमता

M = माध्य

M_d = माध्यिका

SS SD= मानक विचलन

विषमता की गणना के लिए एक और सूत्र है जिसका उपयोग तब किया जाता है जब शतमक की जानकारी उपलब्ध हो:

$S_k = P_{90} + P_{10} / 2 - P_{50}$

जहां,

S_k= विषमता

P_{90} = 90वां शतमक

P_{10} = 10वां शतमक

P_{50} = 50वां शतमक

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 4

1) प्रसामान्यता में अपसरण का क्या अर्थ है?

....

....

....

....

....

2) कुर्टोसिस क्या है?

....

....

....

....

....

3) विषमता क्या है?

....

....

....

....

....

4) कुर्टोसिस और विषमता के मध्य क्या अंतर है?

....

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

5) धनात्मक विषमता और ऋणात्मक विषमता के मध्य क्या अंतर है?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

8.6 सारांश

संक्षेप में, वर्तमान इकाई में हमने संभाव्यता की अवधारण के बारे में चर्चा की हैं। संभाव्यता संभावना या संयोग को संदर्भित करती है। उदाहरण के लिए यदि आप कहते है की ''शायद कल का दिन गर्म होगा'' या ''शिक्षक कल नहीं आयेंगे'', इन वाक्यों सें ज्ञात होता है की कल होने वाली घटनाओं की संभावना है लेकिन निश्चित नहीं है। संभाव्यता से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण अवधारणाओं पर भी चर्चा की गई जैसे की प्रतिदर्श समष्टि, घ टनाएं और घात कुलक, परस्पर अनन्य घटनाऐं/असंयुक्त घटनाऐं, निःशेष/सामूहिक घ टनाऐं, स्वतंत्र और आश्रित घटनाऐं, समसंभावित घटनाए और पूरक घटनाऐं। इसके अलावा, प्रसामान्य संभाव्यता वितरण की अवधारणा, प्रकृति और गुणों को प्रसामान्य वक्र की आकृति की सहायता से स्पष्ट किया गया। प्रसामान्य वक्र एक घंटी के आकार का वक्र है। यह द्विपक्षीय रूप से समष्टि और निरंतर आवृत्ति वितरण का वक्र है। ऐसे वक्र की रचना एक बड़े प्रतिदर्श में सतत् चर के प्राप्ताकों की आवृत्ति के अंकन के परिणाम से होती है। वक्र को प्रसामान्य वितरण वक्र के रूप में जाना जाता है क्योंकि इसका ल अक्ष अवलोकित आवृत्ति की बजाय सापेक्ष आवृत्ति या सम्भाव्यताओं को प्रदान करता है । मानक प्राप्तांक या z-प्राप्तांक पर भी विस्तार से चर्चा की गई है। z-प्राप्तांक के गुण, उपयोग और गणना पर भी प्रकाश डाला गया है। इकाई के अंत में, प्रसामान्यता के अपसरण को समझाया गया है, जहां कुर्टोसिस और विषमता के प्रकारों की आकृति की सहायता से चर्चा की गई थी।

8.7 संदर्भ

Comparison of Independent Component Analysis techniques for Acoustic Echo Cancellation during Double Talk scenario. - Scientific Figure on ResearchGate. Available from: https://www.researchgate.net/Types-of-kurtosis_fig4_275208180 [accessed 15 Oct, 2018].

A. K. Kurtz et al. (1979). Statistical Methods in Education and Psychology, New York: Springer-Verlag New York Inc.

Griffiths, D. et al. (1998). Understanding Data. Principles and Practice of Statistics. Wiley, Brisbane.

Heiman, G.W. (2001). Understanding research method and statistics. An integrated introduction for psychology. 2nd Edn.Houghton Miffin Company, Boston, NewYork.

https://faculty.elgin.edu/dkernler/statistics/ch07/7-2.html accessed on 14/11/17

http://esminfo.prenhall.com/samplechps/larson/pdfs/ch05.pdf accessed on 14/11/17

http://statistics.wikidot.com/ch7 accessed on 15/11/17

https://www.uth.tmc.edu/uth_orgs/educ_dev/oser/L1_6.HTM accessed on 4/6/18

http://influentialpoints.com/Training/z_scores-principles-properties-assumptions.htm accessed on 5/10/18

https://www.spcforexcel.com/knowledge/basic-statistics/are-skewness-and-kurtosis-useful-statistics accessed on 5/10/18

8.8 मुख्य शब्द

घटनाएं : प्रयोग के परिणामों का संग्रह। यह प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय है।

कुर्टोसिस : कुर्टोसिस, वितरण वक्र की पुंछ से संबंधित है न की इसके शिखर से। यह वक्र की उंचाई को प्रदर्शित नहीं करता है। कुर्टोसिस को एक वितरण के लिए विभिन्न तरीकों से मात्र निर्धारित किया जा सकता है।

प्रसामान्य संभाव्यता वक्र : प्रसामान्य वक्र एक घंटी के आकार का वक्र हैं। यह द्विपक्षीय सममित और निरंतर आवृत्ति वितरण वक्र है।

प्रसामान्य संभाव्यता वितरण : चर के लिए सतत् संभाव्यता वितरण को प्रसामान्य संभाव्यता वितरण या सरलता से प्रसामान्य वितरण कहा जाता है। इसे गउसीयन वितरण के रूप में भी जाना जाता है।

संभाव्यता : सांख्यिकी में, संभाव्यता शब्द सभी संभावित समान घ टनाओं के मध्य किसी घटना में घटित होने की आपेक्षित आवृत्ति (अवसर) को दर्शाता है।

विषमता : विषमता अपने माध्य के विषय में यादृच्छिक चर की संभाव्यता वितरण की विषमता का माप है।

मानक प्राप्तांक : मानक प्राप्तांक या z-प्राप्तांक एक रूपांतरित प्राप्तांक है। और यह दर्शाता है की मानक विचलन मात्रक की

संख्या से अवलोकन का मान (असंसाधित प्राप्तांक) माध्य से कितना ऊपर या नीचे है।

8.9 अपनी प्रगति की जांच कीजिए के उत्तर

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 1

1) निम्नलिखित कथनों में सत्य या असत्य बताईये।

क्र.	कथन	सत्य / असत्य
क	ऐसी घटनाओं को समसभावित घटनाएं कहा जाता है यदि प्रत्येक घटना लगभग समान बार घटित होने की पर्याप्त संभावना होती है।	सत्य
ख	संभाव्यता अनुपात हमेशा –1.00 से +1.00 के बीच होती है।	असत्य
ग	दो घटनाओं को परस्पर अनन्य घटनाऐं कह जाता है यदि दोनों एक ही परीक्षण में साथ में घटित होती है।	असत्य
घ	दो या अधिक घटनाओं को स्वतंत्र घटना कहते हैं जब एक के परिणाम का दूसरी घटना पर प्रभाव नहीं पड़ता है, या अन्य घटनाओं के परिणामों से वह प्रभावित नहीं होती है।	सत्य
च	यदि दो घटनाएं परस्पर अनन्य और संपूर्ण हैं वे दोनों एक दूसरे की पूरक कही जाती हैं।	सत्य

अपनी प्रगति की जांच करे 2

1) रिक्त स्थान को भरें:

क) प्रसामान्य संभाव्यता वक्र को शिखर की आदर्श मात्रा या कुर्टोसिस माना जाता है।

ख) प्रसामान्य संभाव्यता वक्र में मध्य, माध्यिका और बहुलक का मान बराबर होता है।

ग) प्रसामान्य वितरण एक सतत् वितरण है और यह सांख्यिकीय सिद्धांत और अनुमान में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

घ) प्रसामान्य वक्र के अंतर्गत इकाई का क्षेत्रफल एक के बराबर माना जाता है।

च) प्रसामान्य वितरण दो मापदंडों द्वारा निर्धारित किया जाता है माध्य और प्रसरण ।

अपनी प्रगति की जांच करें 3

1) रिक्त स्थानों को भरें:

(क) z-प्राप्तांकों का माध्य सदैव शून्य होता है।

(ख) z -प्राप्तांक का उपयोग असंसाधित आँकड़ों को मानकीकृत करने के लिए किया जाता है।

(ग) z-प्राप्तांक का विचरण –3 मानक विचलन (जो प्रसामान्य वितरण वक्र के बांयी ओर होता है) से लेकर +3 मानक विचलन होता है।

(घ) z- प्राप्तांक का मानक विचलन सदैव एक होता है।

(च) मानक प्राप्तांक एक ऐसा प्राप्तांक है जो मान और जहां वितरण में मान निहित है, के विषय में सूचित करता है।

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 4

1) प्रसामान्यता में अपसरण का क्या अर्थ है?

अनेकों बार, प्रसामान्य संभाव्यता वितरण वक्र की तुलना में आवृत्ति वक्र ऊंचे शिखर वाला या चपटा हो सकता है। ऐसे मामलों में कहा जाता है की वितरण प्रसामान्य से अपसरित है।

2) कुर्टोसिस क्या है?

कुर्टोसिस यादृच्छिक चर की संभाव्यता वितरण के टेल्डनेस' (tailedness) का माप है। अन्य 'ाब्दों में, कुर्टोसिस माप है की क्या प्रसामान्य वितरण के संदर्भ में आँकड़ा भारी पुच्छल या हल्का पुच्छल है।

3) विषमता क्या है?

विषमता अपने माध्य के विषय में यादृच्छिक चर की संभाव्यता वितरण की विषमता का माप है।

4) कुर्टोसिस और विषमता के मध्य क्या अंतर है?

कुर्टोसिस यादृच्छिक चर की संभाव्यता वितरण के टेल्डनेस' (tailedness) का माप है। अन्य 'ाब्दों में, कुर्टोसिस माप है की क्या प्रसामान्य वितरण के संदर्भ में आँकड़ा भारी पुच्छल या हल्की पुच्छल है। दूसरी ओर विषमता अपने माध्य के विषय में यादृच्छिक चर की संभाव्यता वितरण की विषमता का माप है।

5) धनात्मक विषमता और ऋणात्मक विषमता के मध्य क्या अंतर है?

वितरण वक्र को धनात्मक रूप में विषम कहा जाता है जब उसमें प्राप्तांक का वितरण बायें छोर पर अधिक होता है। धनात्मक विषमता वितरण में अधिकतर व्यक्तियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक माध्य से काम होते है। दूसरी तरफ, यदि प्राप्तांक का वितरण दायीं ओर अधिक होता है तो वितरण को ऋणात्मक विषमता कहा जाता है (आकृति 8.5 देखें)। यहां माध्यिका माध्य से अधिक है इसलिए माध्य, माध्यिका के बायें तरफ है। इसमें अधिकतर व्यक्तियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक माध्य से अधिक होते है।

8.10 इकाई अंत प्रश्न

क) संभाव्यता की अवधारणा और संबंधित बिंदुओं पर चर्चा कीजिए।

ख) परस्पर अनन्य घटनाएं और निःशेष घटनाओं के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।

ग) प्रसामान्य वितरण वक्र की अवधारणा, प्रकृति और गुणों पर चर्चा कीजिए।

घ) मानक प्राप्तांक के गुणों और गणना की विधि की चर्चा कीजिए।

च) प्रसामान्यता से अपसरण के विभिन्न प्रकार की चर्चा कीजिए।

सूत्रों की झलक

माप	सूत्र
शतमक	$P = L + [(pN/100 - F)/f] X i$
असमूहीकृत आँकड़ों के लिए शतमक कोटि	$PR = 100 - 100R - 50/N$
समूहीकृत आँकड़ों के लिए शतमक कोटि	$PR = 100/N [F + (X-L/i) x f]$
असमूहीकृत आँकड़े के लिए माध्य की गणना	$M = \sum X/N$
समूहीकृत आँकड़े के लिए माध्य	$M = \sum fX/N$
अभिगृहीत माध्य	$M = AM + (\sum fx'/N \times i)$
असमूहीकृत आँकड़े के लिए मध्यिका (विषम आँकड़ा)	$M_d = (N+1)/2$th score
असमूहीकृत आँकड़े के लिए मध्यिका (सम आँकड़ा)	$M_d = (N/2)$th score $+ [(N/2)$th score $+ 1]/2$
समूहीकृत आँकड़े के लिए मध्यिका	$M_d = L + [(N/2) - F/f_m] x i$
असमूहीकृत आँकड़े के लिए बहुलक (प्रथम विधि)	$M_o = 3Mdn - 2M$
असमूहीकृत आँकड़े के लिए बहुलक (दूसरी विधि)	$M_o = L + [d_1/d_1 + d_2] x i$
परास	$R = H - L$
चतुर्थक विचलन	$QD = (Q3 - Q1)/2$
असमूहीकृत आंकडों के औसत विचलन	$AD = \sum \lvert x \rvert /N$
समूहीकृत आंकडों के औसत विचलन	$AD = \sum \lvert fx \rvert /N$
असमूहीकृत आंकडों के लिए मानक विचलन	$SD = \sqrt{\sum x2/N}$
दीर्घ विधि द्वारा समूहीकृत आँकड़ों से मानक विचलन	$SD = \sqrt{\sum fx2/N}$
लघु विधि द्वारा समूहीकृत आँकड़ों से मानक विचलन	$SD = i \sqrt{\sum fx'^2/N - (\sum (fx')/N)^2}$

पियरसन का गुणन आधूर्ण सहसम्. बन्ध	$\Sigma xy / \sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}$
पियरसन का गुणन आधूर्ण सहसम्. बन्ध	$r = N\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y / \sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2] [N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}$
स्पीयरमैन का कोटि अनुक्रम सहस. म्बन्ध	$p = 1 - [(6\Sigma d^2) / [N (N^2 - 1)]$
मानक प्राप्तांक (z प्राप्तांक)	$z = X - M / SD$

पाठन के लिए सुझाव

Cohen, B. H. (2008). Explaining psychological statistics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. Elmes, D. G., Kantrowitz, B. H. and Roedier, H. L. III. (2003). Research methods in psychology. Belmont, CA: Thomson/ Wandsworth Learning.

Foster, J. J. (2001). Data analysis: Using SPSS for windows. London, UK: SAGE.

Guilford, J. P. and Fruchter, B. (1988). Fundamental statistics in psychology and education. New Delhi: McGraw-Hill Howell, D. (2010). Statistical methods for psychology (7th ed.). Belmont, CA: Wadsworth.

Jones, S. (2010). Statistics in Psychology. Basingstoke: Palgrave Macmillan

Kerlinger, F. R. (1986). Foundations of behavioural research. Bangalore: Prism Books.

Landau, S. and Everitt, B. S. (2004). A handbook of statistical analyses using SPSS. London, UK: Chapman and Hall.

Levin, J. and Fox, J. A. (2006). Elementary statistics in social research. Delhi: Pearson Education.

Mangal, S. K. (2002). Statistics in psychology and education. New Delhi: HI Learning Private Limited.

Mulhern, G., & Greer, B. (2011). Making sense of data and statistics in psychology. Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Salkind, N. J. (2014). Statistics for people who (think that) hate statistics. New Delhi: SAGE.

Tate, M. W.(1955). Statistics in education. New York: Macmillion Co.

Stephens, L. (2009). Statistics in psychology. New York: McGraw-Hill.

Veeraraghavan, V and Shetgovekar, S. (2016). Textbook of Parametric and Nonparametric Statistics. Delhi: Sage.

अभ्यास पुस्तिकाः अभ्यास शिक्षार्थी को परिपूर्ण बनाता है

1) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए 10वें शतमक की गणना कीजिए।

वर्ग अंतराल	***f***
25-29	16
20-24	7
15-19	8
10-14	5
5-9	10
0-4	4
	N= 50

2) संगठनात्मक नागरिकता व्यवहार पर कर्मचारियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक नीचे दिए गए हैं। प्राप्तांक 43 के लिए शतमक कोटि की गणना कीजिए।

45, 43, 46, 56, 66, 54, 50, 41, 34, 32

प्राप्तांक	कोटि क्रम

3) वर्ग अंतराल 5 की सहायता से निम्न आँकड़ों के लिए संचयी आवृत्ति और आवृत्ति वितरण ज्ञात कीजिए।

10, 1, 2, 3, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 3, 15, 6, 7, 9, 12, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19

वर्ग अंतराल	टैली	आवृत्ति (*f*)	संचयी आवृत्ति

4) निम्नलिखित आँकड़ों में माध्य, मध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए:

अ) 39, 41, 56, 72, 83, 92, 35, 36, 39

ब) 7, 15, 14, 11, 21, 18, 11, 17, 34, 45, 15, 13, 12, 11, 20, 15, 11, 10, 6, 7, 5, 15, 12, 11, 10, 11, 5, 6, 11, 10, 7

5) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य, मध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए:

प्राप्तांक	f	मध्य बिन्दु (x)	fx
25—29	2		
20—24	7		
15—19	1		
10—14	2		
5—9	3		

6) 19, 10, 6, 8, 12 अंकों का औसत विचलन ज्ञात कीजिए।

7) निम्नलिखित वितरण के लिए औसत विचलन की गणना कीजिए।

प्राप्तांक	f	मध्य बिन्दु X	fX	**x=(X-M)**	fx	**|fx|**
100—104	2					
95—99	0					
90—94	3					
75—89	1					
70—74	4					
65—69	2					
60—64	3					

8) 10 छात्रों के निम्नलिखित अंक (कुल अंक 50) के चत्तुर्थक विचलन की गणना कीजिए:

20, 36, 15, 40, 45, 32, 25, 35, 38, 46

9) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए मानक विचलन की गणना कीजिए:

आँकड़े (x)	X-M	x^2
20		
30		
12		
14		
16		
18		
30		
20		
20		

सूत्र

गणना

10) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए पिर्यसन गुणन आपूर्ण की गणना कीजिए:

व्यक्तिगत	आँकड़ा 1 (X)	आँकड़ा 2 (Y)	*x*	*y*	*xy*	x^2	y^2
A	8	2					
B	4	7					
C	3	6					
D	2	10					
E	9	1					
F	8	3					
G	7	2					
H	4	8					
I	3	7					
J	2	10					

सूत्र

गणना

11) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए पिर्यसन गुणन आपूर्ण की गणना कीजिए:

छात्र	इतिहास में अंक (X)	अंग्रेजी में अंक (Y)	x	y	xy	x^2	y^2
A	8	4					
B	7	4					
C	10	5					
D	15	10					
E	10	7					

सूत्र

गणना

12) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए पिर्यसन आपूर्ण की गणना कीजिए:

छात्र	गणित में अंक (X)	विज्ञान में अंक (Y)	x	y	xy	x^2	y^2
A	4	10					
B	5	14					
C	3	12					
D	9	11					
E	7	15					

सूत्र

गणना

13) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए स्पियरमैन सहसंबंध गुणक ज्ञात कीजिए:

कर्मचारी	संवेगात्मक बुद्धि पर प्राप्तांक (X)	कार्य अभिप्रेरण पर प्राप्तांक (Y)	संवेगात्मक बुद्धि में क्रम (R_1)	संवेगात्मक बुद्धि में क्रम (R_2)	क्रम में अंतर R_1-R_2=m|d|	अंतर का वर्ग d^2
A	20	45				
B	25	40				
C	22	39				
D	21	37				
E	29	30				
F	28	32				
G	34	34				

सूत्र

गणना

14) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए स्पियरमैन सहसंबंध गुणक ज्ञात कीजिए:

कर्मचारी	परीक्षाण X पर प्राप्तांक (X)	परीक्षाण Y पर प्राप्तांक (Y)	X परीक्षाण में क्रम (R_1)	Y परीक्षाण में क्रम (R_2)	क्रम में अंतर $R_1 - R_2 = \|d\|$	अंतर का वर्ग d^2
A	10	16				
B	15	10				
C	5	5				
D	15	16				
E	4	4				
F	20	16				
G	20	5				
H	12	25				
I	20	36				
J	38	20				

सूत्र

गणना

15) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए स्पियरमैन सहसंबंध गुणक ज्ञात कीजिए:

व्यक्ति	आनुमानित अभिमानक व्यवहार पर प्राप्तांक (X)	आत्म–धारणा पर प्राप्तांक (Y)	आनुमानित अभिमानक व्यवहार में क्रम (R_1)	आत्म–धारणा में क्रम (R_2)	क्रम में अंतर $R_1 - R_2 = d$	अंतर का वर्ग d^2
A	36	23				
B	30	29				
C	25	20				
D	31	24				
E	40	40				
F	39	37				
G	41	30				
H	32	21				

सूत्र

गणना

अभ्यास पुस्तिका मे अभ्यास के उत्तर

1) 5

2) PR=30

3)

वर्ग अंतराल	टैली	आवृत्ति (X)	संचयी आवृत्ति
16–20	///	3	24
11–15	~~////~~ ~~////~~	10	21
6–10	~~////~~ /	6	11
1–5	////	5	5

4) अ) माध्य=54, मध्यिका=41, बहुलक=39

5) ब) माध्य=13.35, मध्यिका=11, बहुलक=11

6) AD = 36

7) AD = 12.53

8) QD = 7.5

9) SD = 6.32

10) r = –0.97

11) r = 0.95

12) r = 0.14

13) P = –0.75

14) P = 0.51

15) P = 0.