1.6.3. Electrostatic Energy of a Uniformly Charged Sphere

If we divide the distribution into infinitesimal charge elements and accounting for the work done in transporting these elements from infinity to assemble the distribution, the electrostatic potential energy of a continuous charge distribution can be calculated.

From **figure 1.29,** assume that R is the radius of sphere which is assembled by bringing successively infinitesimally thin spherical layers from infinity. Suppose radius of the sphere at any instant is r and the charge in the sphere at that instant is q.

Let the volume charge density is ρ, then we have $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

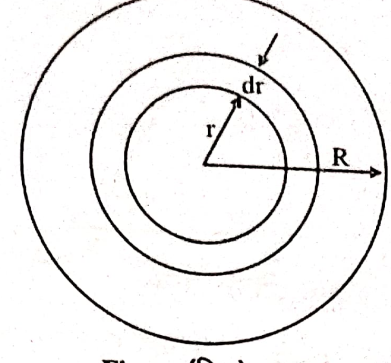

Figure (चित्र)– 1.29

Now assume that there is an infinitesimal shell of charge having thickness dr which is added to the sphere of radius r. The charge contained in the shell of thickness is given as

$$dr = dq = 4\pi r^2\, dr\rho$$

Where, $4\pi r^2 dr$ = volume of the spherical shell

The work done in adding the charge dq to the sphere having the charge q is given by:

dW = Potential of the sphere of radius r × charge contained in the shell

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}(dq)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi r^3\rho}{3\,r}(4\pi r^2 dr\rho) = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 r^4 dr$$

Here, work is stored in the form of a potential energy of the system, dU.

Integrate above equation from r = 0 to r = R for determining the total energy U which is required to assemble the sphere of charge of radius R.

Thus

$$U = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{5}\right]_0^R = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

The total charge on the sphere is given as

$$Q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

Where Q = total charge

Or, $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

Now substitute the value of ρ in the above equation,

$$U = \frac{4\pi R^5}{15\varepsilon_0}\left(\frac{3Q}{4\pi R^3}\right)^2 = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

1.6.3. एकसमान आवेश क्षेत्र की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

यदि हम वितरण को अतिसूक्ष्म आवेश अवयवों में विभाजित करते हैं तथा वितरण को एकत्रित करने के लिए इन अवयवों को अनंत से ले जाने में किए गए कार्य के लिए लेखांकन करते हैं, तब अतिसूक्ष्म आवेश वितरण की स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा की गणना की जा सकती है।

चित्र 1.29 से, माना R गोले की त्रिज्या है जो अनंत से क्रमशः अतिसूक्ष्म रूप से पतली गोलाकार परतों को लाकर एकत्रित किया जाता है। माना किसी क्षण गोले की त्रिज्या r है और उस क्षण पर गोले में आवेश q है।

माना आयतन आवेश घनत्व ρ है, तब ज्ञात है, $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

अब मान लें कि मोटाई dr वाला एक अतिसूक्ष्म आवेश है जिसे r त्रिज्या के गोले में जोड़ा गया है। मोटाई के शैल में निहित आवेश निम्न प्रकार दिया गया है–

$$dr = dq = 4\pi r^2\, dr\rho$$

जहाँ, $4\pi r^2 dr$ = गोलाकार शैल का आयतन

आवेश q वाले गोले पर आवेश dq को जोड़ने में किया गया कार्य निम्न प्रकार दिया गया है–

dW = त्रिज्या r के गोले का विभव × शैल में समाहित आवेश

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}(dq)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi r^3\rho}{3\,r}(4\pi r^2 dr\rho) = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 r^4 dr$$

यहाँ, कार्य प्रणाली की स्थितिज ऊर्जा, dU के रूप में संचित होता है।

त्रिज्या R के आवेश के गोले को एकत्रित करने के लिए अभीष्ट कुल ऊर्जा U को ज्ञात करने के लिए उपरोक्त समीकरण को r = 0 से r = R तक समाकलित करने पर,

इस प्रकार,

$$U = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{5}\right]_0^R = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

गोले पर कुल आवेश निम्न प्रकार दिया गया है–

$$Q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

जहाँ Q = कुल आवेश

या, $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

अब उपरोक्त समीकरण में ρ का मान प्रतिस्थापित करने पर–

$$U = \frac{4\pi R^5}{15\varepsilon_0}\left(\frac{3Q}{4\pi R^3}\right)^2 = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$